

Zur Schätzung von Häufigkeitstrends von extremen Wetter- und Klimaereignissen

M. Mudelsee, M. Börngen und G. Tetzlaff

Zusammenfassung

Die Vorteile der Kernschätzung gegenüber dem Abzählen von Ereignissen in Zeitintervallen werden dargestellt. Für das beiden Methoden gemeinsame Glättungsproblem gestattet die Kreuzvalidierung eine Lösung. Für die Hochwasserereignisse der Oder im Zeitraum 1350 bis 1850 wird eine Abnahme der Häufigkeit nach ca. 1675 gefunden; weitergehende Aussagen bedingen eine Homogenisierung der Daten. Die dargestellte Methodik wird gegenwärtig in das Computerprogramm XTREND implementiert.

Summary: On the estimation of trends in the frequency of extreme weather and climate events

The advantages of kernel estimation over counting of events within time intervals are shown. Cross validation offers a solution for the smoothing problem which is common to both methods. As regards flooding events of the river Oder in 1350 to 1850, a decrease in the frequency after about 1675 is found. More detailed results demand homogenized data. The method is currently being implemented into the computer program XTREND.

1. Einleitung

„Natural Hazards“ (Bryant 1991) ist dabei, ein Schlagwort zu werden vergleichbar mit „Global Change“ (Houghton *et al.* 1996). Solche extremen Wetter- oder Klimaereignisse treten mannigfaltig auf: Wirbelstürme, Starkregen, Hochwasser, Dürreperioden usw. Da sie zum Teil ein enormes Zerstörungspotential aufweisen, ist die Frage nach ihrer natürlichen Variabilität und einem möglichen anthropogenen Einfluß von gesellschaftlicher Bedeutung.

Eine mögliche Analysemethode wird durch die *Extreme Value Theory* (Embrechts *et al.* 1997) bereitgestellt: Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von zum Beispiel Dollar-Schäden durch Hurrikane im Südosten der USA. Besondere Bedeutung dabei haben die Schwänze der Verteilung. Als ein Resultat wird die Wahrscheinlichkeit bestimmt, daß in einem Zeitbereich ein Mindestschaden auftreten wird. Grundannahme dieser Methode ist Stationarität, d. h. eine zeitlich konstante Verteilung. Für genügend kurze Beobachtungszeiträume (jedoch länger noch als der Jahreszyklus), und eventuell nach Durchführung geeigneter Transformationen (im Falle der Hurrikan-Dollar-Schäden, Zeitraum 1925–95, die Division durch den zeitabhängigen ökonomischen Reichtum im Gebiet (Pielke und Landsea 1998)), mag die Stationaritätsannahme hinreichend begründet sein.

Für längere Zeiträume, wie von den Anfängen der Industrialisierung bis heute, ist

die Annahme einer konstanten natürlichen Variabilität extremer Wetter- und Klimaereignisse unrealistisch. Eine kausale Verknüpfung mit anthropogenem Einfluß bedingt die Möglichkeit einer Änderung der Variabilität, d. h. eines **Trends in der Häufigkeit**. Zudem werden extreme Wetter- und Klimaverhältnisse zuweilen nur als Ja/Nein-Information archiviert (z. B. Frostringe in Bäumen), die Indikator-Qualität der gemessenen Klimavariablen (z. B. Sauerstoffisotopenverhältnisse in Eisbohrkernen als Temperaturanzeiger) ist eingeschränkt, oder die Daten (wie die hier untersuchten) bestehen aus historischen Aufzeichnungen und zeigen entsprechende subjektive Einflüsse — eine Schätzung der Wahrscheinlichkeitsdichte ist dann nicht möglich oder stark fehleranfällig. Deshalb ist die Analyse von Trends in der Häufigkeit unerlässlich zur Beurteilung der natürlichen Variabilität extremer Wetter- und Klimaereignisse.

Die einfachste Methode, Häufigkeitstrends abzuschätzen, ist bloßes Abzählen der Extremereignisse innerhalb von Zeitintervallen, entsprechend der Histogrammbildung bei der Wahrscheinlichkeitsdichteschätzung. Die Nachteile dieser Methode (Positionierung der Intervallgrenzen, Informationsverlust, „holpriges“ Aussehen) werden in Abschnitt 2 dargestellt. Diese Nachteile werden, analog zur Dichteschätzung, durch die Kernschätzung (Abschnitt 3) aufgehoben. Es scheint so (Literaturrecherche im *Science Citation Index* 1999), daß die Kernschätzung, obwohl Standardwerkzeug in der Statistik seit über 20 Jahren, noch keinen Eingang in meteorologische/klimatologische Anwendungen gefunden hat — mit Ausnahme von Solow (1991), der die Auftrittshäufigkeit von Vulkaneruptionen untersucht.

Von entscheidender Bedeutung ist, auch bei der Kernschätzung, das Glättungsproblem (Länge der Zeitintervalle), das hier mit Hilfe der Kreuzvalidierung (Abschnitt 4) gelöst wird. Illustriert werden die Schätzverfahren durch die Zeitreihe von Hochwasserereignissen für die Oder im Zeitraum 1350 bis 1850. Es zeigt sich (Abschnitt 5), daß ab ca. 1675 die Häufigkeit von Hochwasserereignissen der Oder abnahm.

2. Histogrammschätzung

Abbildung 1 zeigt die Daten (unter Berücksichtigung der Kalenderumstellung) von Hochwasserereignissen der Oder im Zeitraum 1350 bis 1850 nach den Weikinschen Quelltexten (Weikinn 1958–1963, 2000, o. J.).

Abbildung 2 zeigt als Histogrammschätzung die Hochwasseranzahl in 50-Jahres-Intervallen, beginnend mit dem Jahr 1350. Abbildung 3 zeigt die Hochwasseranzahl ebenfalls in 50-Jahres-Intervallen, jedoch um 25 Jahre versetzt, beginnend 1375. Während man Abb. 2 vielleicht so beschreiben würde: „Anstieg von 1350 bis 1550, danach ungefähr konstant bzw. leicht ansteigend, mit Ausnahme der deutlichen Erhöhung im Bereich 1650–1700“, könnte man Abb. 3 deuten als: „Anstieg von 1375 bis 1650, danach leichter Abfall“. Diese Zweideutigkeit, hervorgerufen durch die Positionierung der Intervallgrenzen, erschwert offensichtlich eine vernünftige Interpretation des Häufigkeitstrends.

Weiterhin ist festzustellen, daß die Reduktion der Datenanzahl ($N = 169$) auf die Anzahl der Zeitpunkte, an der eine Histogrammschätzung vorliegt (d. h. die Klassenanzahl $n_k = 10$ bzw. 9) einen Informationsverlust darstellt (Abb. 2, 3).

Darüberhinaus führt die Histogrammschätzung aufgrund der Ja/Nein-Möglichkeit der Intervallzugehörigkeit generell zu einem „holprigen“ Aussehen der geschätzten Häufigkeit, wie hier besonders in Abbildung 4 deutlich wird. Obwohl das als von „kosmetischer

Natur“ (Diggle 1985) empfunden werden kann, ist es dennoch ein „unnatürlicher“ Aspekt.

Von entscheidender Bedeutung ist jedoch die Wahl der Intervallbreite, das Glättungsproblem. Abbildungen 2 bis 5 verwenden die gleichen Daten, jedoch unterschiedliche Intervallbreiten. Eine große Breite (Abb. 5) bedeutet mehr Ereignisse pro Intervall und damit einen niedrigeren statistischen Fehler der geschätzten Häufigkeit. Gleichzeitig können kurzzeitigere Datenmerkmale nicht mehr aufgelöst werden (erhöhter systematischer Fehler). Umgekehrt im Falle einer kleinen Intervallbreite (Abb. 4): erhöhter statistischer Fehler bei niedrigerem systematischem Fehler.

Eine Möglichkeit zur Lösung des Glättungsproblems, des Ausbalancierens des statistischen gegen den systematischen Fehler, wird in Abschnitt 4 dargestellt.

3. Kernschätzung

Es seien T_1, T_2, \dots, T_N die geordneten Beobachtungen von Extremereignissen im Zeitintervall $[T_S; T_E]$. Die Daten werden als Realisierungen eines nichthomogenen Poisson-Prozesses (Cox und Lewis 1966) betrachtet:

1. die Wahrscheinlichkeit, daß in einem infinitesimalen Zeitintervall $[t; t + \delta]_{\delta \rightarrow 0} \in [T_S; T_E]$ ein Extremereignis auftritt, ist gleich $\delta \cdot \lambda(t)$;
2. die Wahrscheinlichkeit gleichzeitiger Ereignisse ist vernachlässigbar;
3. die Wahrscheinlichkeiten beobachteter Ereignisse in sich nicht überschneidenden Intervallen aus $[T_S; T_E]$ sind unabhängig voneinander.

$\lambda(t)$ wird Auftrettsrate oder in der Statistik üblicherweise Intensität genannt. Die Aufgabe ist also, die Intensität aus den Daten der Extremereignisse zu schätzen.

Im Fall der Hochwasserdaten (Abb. 1) sollte Eigenschaft 2 ausreichend erfüllt sein: bei der Auswertung der Weikinnschen Quellensammlung wurde darauf geachtet, daß mehrere Meldungen zu einem einzelnen Hochwasserereignis, etwa an aufeinander folgenden Tagen, auch nur einen Dateneintrag erhalten. Ebenfalls Eigenschaft 3 sollte gut erfüllt sein. Man müsste schon abenteuerliche Gegenkonstruktionen errichten, etwa: „Das Oder-Jahrhunderthochwasser 1736 [vgl. dazu Miltzer *et al.* (1999)] dezimierte die ansässige Bevölkerung so stark, daß in den Folgejahren keine Hochwasserbeobachtungen mehr durchgeführt werden konnten...“

Die Kernschätzung (Rosenblatt 1956, Diggle 1985) schätzt die Intensität $\lambda(t)$ als

$$\hat{\lambda}_h(t) = \sum_{i=1}^N K_h(t - T_i), \quad t \in [T_S; T_E], \quad K_h(\cdot) = h^{-1} K(\cdot/h) \quad (1)$$

mit dem Glättungsparameter oder Bandbreite h . Die Wahl der genauen Form der Kernfunktion K ist von sekundärer Bedeutung, solange K symmetrisch und ≥ 0 ist und $\int K = 1$ ist. Wir wählen eine Gauß-Funktion, weil sich $\hat{\lambda}_h$ dann recheneffektiv im Fourierraum (mit *Fast Fourier Transform*, FFT) bestimmen läßt (Silverman 1982). Das sanfte Auslaufen der Gauß-Funktion nach $\pm\infty$ beseitigt auch den dem Histogramm (K : Rechteckfunktion) inhärenten Nachteil des „holprigen“ Aussehens von $\hat{\lambda}$ (Abschnitt 2).

In Gleichung (1) kann $\hat{\lambda}_h$ an beliebig fein eingestellten t berechnet werden, was die Willkürlichkeit der Positionierung der Klassengrenzen sowie den Informationsverlust der

Histogrammschätzung (Abschnitt 2) aufhebt. Ein Gitter von 1024 Punkten (Potenz von 2 wegen der FFT) ergibt eine gute visuelle Darstellung bei geringer Rechenzeit (wenige Sekunden bei dem hier untersuchten Beispiel ($N = 169$) und einem 433-MHz-Celeron-PC).

Zur Wahl des Glättungsparameters h siehe den folgenden Abschnitt. Es sei noch auf den Vorteil der Kernschätzung als nichtparametrische Schätzmethode verwiesen: man kommt ohne strukturelle Annahmen aus, wie sie zum Beispiel das Modell eines linearen Anstiegs der Häufigkeit mit der Zeit tut. Das bedeutet, daß die Kernschätzung von Häufigkeitstrends ein flexibles Verfahren ist, einsetzbar auf unterschiedlichen meteorologischen und klimatologischen Anwendungsfeldern (Abschnitt 1).

4. Glättungsproblem

Die Wahl des Glättungsparameters h beeinflußt (Gleichung 1, siehe auch Abschnitt 2 sowie Abb. 7 und 8) entscheidend die Form des geschätzten Intensitätsverlaufes, $\hat{\lambda}_h(t)$. Es wird eine Bandbreite gesucht, für die, einfach gesprochen, $\hat{\lambda}_h(t)$ „nahe bei“ $\lambda(t)$, dem wahren Intensitätsverlauf liegt bzw. ein ausgewogenes Verhältnis statistischer/systematischer Fehler vorliegt. Es gibt unterschiedliche Maße für das „nahe bei“; wir folgen hier Brooks und Marron (1991), die den *integrated square error* (*ISE*) heranziehen:

$$\begin{aligned} ISE_\lambda(h) &= \int_{T_S}^{T_E} \left[\hat{\lambda}_h(t) - \lambda(t) \right]^2 dt \\ &= \int_{T_S}^{T_E} \hat{\lambda}_h(t)^2 dt - 2 \int_{T_S}^{T_E} \hat{\lambda}_h(t) \lambda(t) dt + \int_{T_S}^{T_E} \lambda(t)^2 dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Brooks und Marron geben weiter die Kreuzvalidierungsfunktion an als

$$CV_\lambda(h) = \int_{T_S}^{T_E} \hat{\lambda}_h(t)^2 dt - 2 \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_{h,i}(T_i), \quad (3)$$

worin

$$\hat{\lambda}_{h,i}(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N K_h(t - T_j) \quad (4)$$

der *leave-one-out*-Kernschätzer ist. Analog zu der Schätzung des Erwartungswertes $\mu = \int x f(x) dx$ einer Wahrscheinlichkeitsdichte f durch den Mittelwert einer Stichprobe, $\bar{x} = 1/n \sum_{i=1}^n x_i$, läßt sich $\sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_{h,i}(T_i)$ als Momentenschätzer von $\int_{T_S}^{T_E} \hat{\lambda}_h(t) \lambda(t) dt$ auffassen. Das Weglassen des Summanden $j = i$ in Gleichung (4) sorgt dafür, daß aus der gemeinsamen Stichprobe $\{T_1, \dots, T_N\}$ nicht sowohl die Schätzung als auch das Maß (*ISE*)

der Schätzqualität genommen werden. Da $\int_{T_S}^{T_E} \lambda(t)^2 dt$ unabhängig von h ist, liegt diejenige Bandbreite h_{CV} , die $CV_\lambda(h)$ minimiert, nahe bei der Bandbreite h_{ISE} , die $ISE_\lambda(h)$ minimiert. (Die Konvergenz jedoch, mit der h_{CV} gegen h_{ISE} strebt, geht sehr langsam mit N , vgl. Marron (1987).)

Abbildung 6 zeigt die Kreuzvalidierungsfunktion für die Wahl des Glättungsparameters im Falle der Hochwasserereignisse der Oder im Zeitraum 1350 bis 1850. Das Minimum liegt bei $h \approx 20$ Jahre. Abbildung 7 zeigt die entsprechende Kernschätzung des Intensitätsverlaufes.

Wegen der oben erwähnten langsamen Konvergenz von $h_{CV} \rightarrow h_{ISE}$ sollte bei dem Oderhochwasser-Datensatz ($N = 169$) auch mit anderen Bandbreiten experimentiert werden. Als obere Grenze für h würde vielleicht $h = 75$ Jahre akzeptabel sein, wofür $CV_\lambda(h)$ noch nicht stark gegenüber dem Minimum angewachsen ist (Abbildung 6). Abbildung 8 zeigt die entsprechende Kernschätzung des Intensitätsverlaufes.

Durch die Kreuzvalidierung wird also zumindest ein geeigneter Bereich für h vorgegeben. Die letztliche Auswahl von h hat deshalb subjektive Anteile. Für die hier untersuchten Oderhochwasser erscheint $h = 20$ Jahre vielleicht etwas zu klein, entsprechende hydrologische/meteorologische Änderungen dürften etwas langsamer ablaufen. Marron (1988) gibt weiter an, daß die Kreuzvalidierungsfunktion häufig auch lokale Minima zeigt (im Unterschied zu Abb. 6 hier) und deshalb eine *brute-force*-Berechnung von $CV_\lambda(h)$ angezeigt ist. Das Computerprogramm XTREND, mit dem die Kernschätzungen hier durchgeführt wurden, ist deshalb für ein interaktives Arbeiten ($CV_\lambda(h)$ grafisch, Auswahl von h , Plot von $\hat{\lambda}_h(t)$, Neuauswahl von h usw.) ausgerichtet.

5. Ergebnis

Ein Problem bei der Interpretation der geschätzten Intensitätsverläufe der Oder-Hochwasserereignisse (Abb. 7 und 8) ist die Inhomogenität der Daten. Es ist davon auszugehen, daß im untersuchten Zeitraum 1350–1850 die Wahrscheinlichkeit einer Hochwasser-Aufzeichnung, vorgenommen durch natur- und überlieferungsinteressierte Menschen, zugenommen hat — eventuell mit einer Unterbrechung im Dreißigjährigen Krieg 1618–48. Eine realistischere, in Zukunft vorzunehmende Datenanalyse erfordert deshalb als ersten Schritt eine entsprechende Homogenisierung. Diese kann einerseits durchgeführt werden mit Hilfe von Zählungen meteorologischer Mitteilungen wie Hellmann (1883); diese Arbeit erfaßt jedoch nur den Bereich 1484–1881. Sofern die Annahme berechtigt ist, daß die Aufzeichnungswahrscheinlichkeit sich langsamer geändert hat (Größenordnung > 100 Jahre) als das Hochwassergeschehen ($h = 20$ – 75 Jahre, siehe Abb. 7–8), könnte eine Homogenisierung erfolgen über Normierung:

$$\hat{\lambda}_{h_{CV}}(t) \bigg/ \hat{\lambda}_{h \gtrsim 100 \text{ Jahre}}(t).$$

Weiterhin sollen ebenfalls unterschiedliche Stärkeklassen der Hochwasser, ermittelt aus Anzahl ertrunkener Menschen, Ausmaß der ökonomischen Schäden, Anzahl der Meldungen usw., untersucht werden. Eine Differenzierung in Sommer-/Winterhochwasser mag Zusatzinformation erbringen. Schließlich sollen die Oderhochwasser im Zeitraum 1850 bis heute (welche nicht in den Weikinnnschen Quellentexten enthalten sind), einbezogen werden.

Trotz der anzunehmenden Inhomogenität der Daten (s. o.) kann man jedoch festhalten (Abb. 7, 8), daß nach ca. 1675 die Häufigkeit von Hochwasserereignissen der Oder abnahm. Eine Homogenisierung würde diesen Befund lediglich verstärken.

Um weitergehende Aussagen machen zu können, sind neben der Datenhomogenisierung und der Erweiterung des Zeitbereiches folgende methodische Ergänzungen geplant:

1. Pseudodatenerzeugung (Cowling und Hall 1996) im Bereich vor 1350, um Randeffekte zu mildern;
2. *Bootstrap*-Simulationen (Cowling *et al.* 1996) zur Ermittlung von Konfidenzbändern von $\hat{\lambda}_h(t)$. Erst damit kann beantwortet werden, wie signifikant die Häufigkeitsabnahme seit 1675 ist, oder ob kurzzeitige Änderungen im Hochwassergeschehen der Oder, angezeigt durch den Intensitätsverlauf bei kleiner Bandbreite h_{CV} (Abb. 7), „real“ sind.

6. Schlussfolgerungen

Die Kernschätzung ist besser als die Histogrammschätzung geeignet, Häufigkeitstrends von extremen Wetter- und Klimaereignissen zu schätzen, weil sie (1) kein Positionierungsproblem der Histogrammgrenzen aufweist, (2) keinen Informationsverlust bewirkt und (3) die geschätzte Auftretsrates oder Intensität kein „unnatürliches holpriges“ Aussehen zeigt (bei Gaußscher Kernfunktion). Wie bei der Histogrammschätzung, so ist auch bei der Kernschätzung das Glättungsproblem zentral. Kreuzvalidierung gibt eine Lösungsorientierung, in der konkreten Analyse ist das Experimentieren mit unterschiedlichen Bandbreiten jedoch unverzichtbar.

Das Ergebnis, der Häufigkeitstrend von Hochwasserereignissen der Oder im Zeitraum 1350 bis 1850, trägt lediglich vorläufigen Charakter, weil (1) die Daten nicht homogenisiert sind (Aufzeichnungswahrscheinlichkeit) und (2) noch keine *Bootstrap*-Konfidenzbänder von dem geschätzten Intensitätsverlauf ermittelt wurden. Es scheint so, daß ab ca. 1675 die Hochwasserhäufigkeit für die Oder, wie aufgezeichnet durch die Weikinnschen Quellentexte, abnahm.

Die hier dargestellte Methodik (Kernschätzung, Pseudodatenerzeugung, *Bootstrap*-Simulationen) wird gegenwärtig in das Computerprogramm XTREND implementiert.

Dank

Herrn Dr. H.-J. Schönfeldt sei für die kritische Rückfrage zur konkreten FFT-Berechnung herzlich gedankt. Cand. met. Korinna König digitalisierte die verwendete Oderhochwasser-Zeitreihe aus den Weikinnschen Quellentexten. Die vorliegende Arbeit wurde finanziell unterstützt durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (Mu 1595/1-1, Mu 1595/1-2, Te 51/15-1).

Literatur

Brooks MM, Marron JS (1991) Asymptotic optimality of the least-squares cross-validation bandwidth for kernel estimates of intensity functions. *Stochastic Processes and their Applications* 38:157–165.

- Bryant E (1991) *Natural Hazards*. Cambridge University Press, Cambridge, 294 S.
- Cowling A, Hall P (1996) On pseudodata methods for removing boundary effects in kernel density estimation. *Journal of the Royal Statistical Society Series B* 58:551–563.
- Cowling A, Hall P, Phillips MJ (1996) Bootstrap confidence regions for the intensity of a Poisson point process. *Journal of the American Statistical Association* 91:1516–1524.
- Cox DR, Lewis PAW (1966) *The Statistical Analysis of Series of Events*. Methuen, London, 285 S.
- Diggle P (1985) A kernel method for smoothing point process data. *Applied Statistics* 34:138–147.
- Embrechts P, Klüppelberg C, Mikosch T (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin, 648 S.
- Hellmann G (1883) *Repertorium der Deutschen Meteorologie*. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 996 S.
- Houghton JT, Meira Filho LG, Callander BA, Harris N, Kattenberg A, Maskell K (1996) *Climate Change 1995: The Science of Climate Change*. Cambridge University Press, Cambridge, 572 S.
- Marron JS (1987) What does optimal bandwidth selection mean for nonparametric regression estimation? In: Dodge Y (Hrsg.) *Statistical Data Analysis Based on the L_1 -Norm and Related Methods*. North-Holland, Amsterdam, 379–392.
- Marron JS (1988) Automatic smoothing parameter selection: A survey. *Empirical Economics* 13:187–208.
- Militzer S, Börngen M, Tetzlaff G (1999) Das Oderhochwasser von 1736: Ein Analogon zum Jahrhunderthochwasser 1997. *Geoökodynamik* 20:309–322.
- Pielke RA Jr, Landsea CW (1998) Normalized hurricane damages in the United States: 1925–95. *Weather and Forecasting* 13:621–631.
- Rosenblatt M (1956) Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics* 27:832–837.
- Silverman BW (1982) Kernel density estimation using the Fast Fourier Transform. *Applied Statistics* 31:93–99.
- Solow AR (1991) An exploratory analysis of the occurrence of explosive volcanism in the Northern Hemisphere, 1851–1985. *Journal of the American Statistical Association* 86:49–54.
- Weikinn C (1958–1963) *Quellentexte zur Witterungsgeschichte Europas von der Zeitwende bis zum Jahre 1850, Hydrographie, Teile 1–4*. Akademie-Verlag, Berlin.
- Weikinn C (2000) *Quellentexte zur Witterungsgeschichte Europas von der Zeitwende bis zum Jahre 1850, Hydrographie, Teil 5*. Herausgegeben und bearbeitet von Michael Börngen und Gerd Tetzlaff. Borntraeger-Verlag, Berlin.
- Weikinn C (o. J.) *Quellentexte zur Witterungsgeschichte Europas von der Zeitwende bis zum Jahre 1850, Hydrographie, Teil 6*. Herausgegeben und bearbeitet von Michael Börngen und Gerd Tetzlaff. Borntraeger-Verlag, Berlin. [in Bearbeitung]

Adresse der Autoren:

Dr. Manfred Mudelsee, Dr. Michael Börngen, Prof. Dr. Gerd Tetzlaff
 Universität Leipzig, LIM — Institut für Meteorologie, Stephanstr. 3, 04103 Leipzig

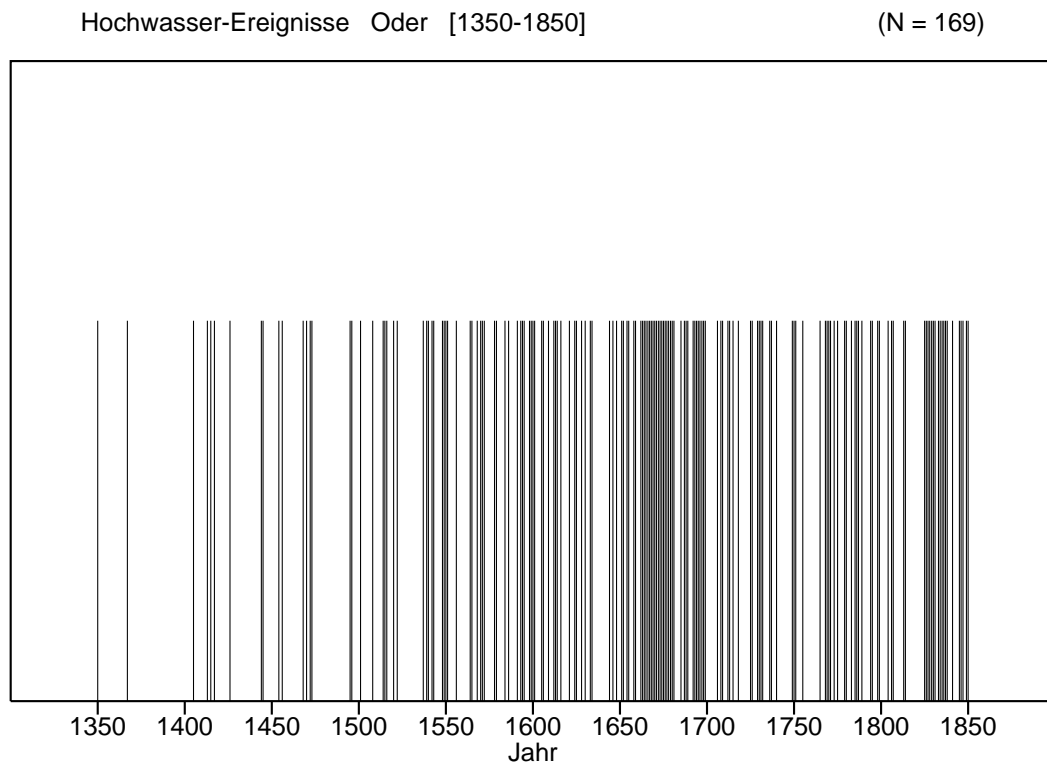


Abbildung 1: Untersuchte Daten.

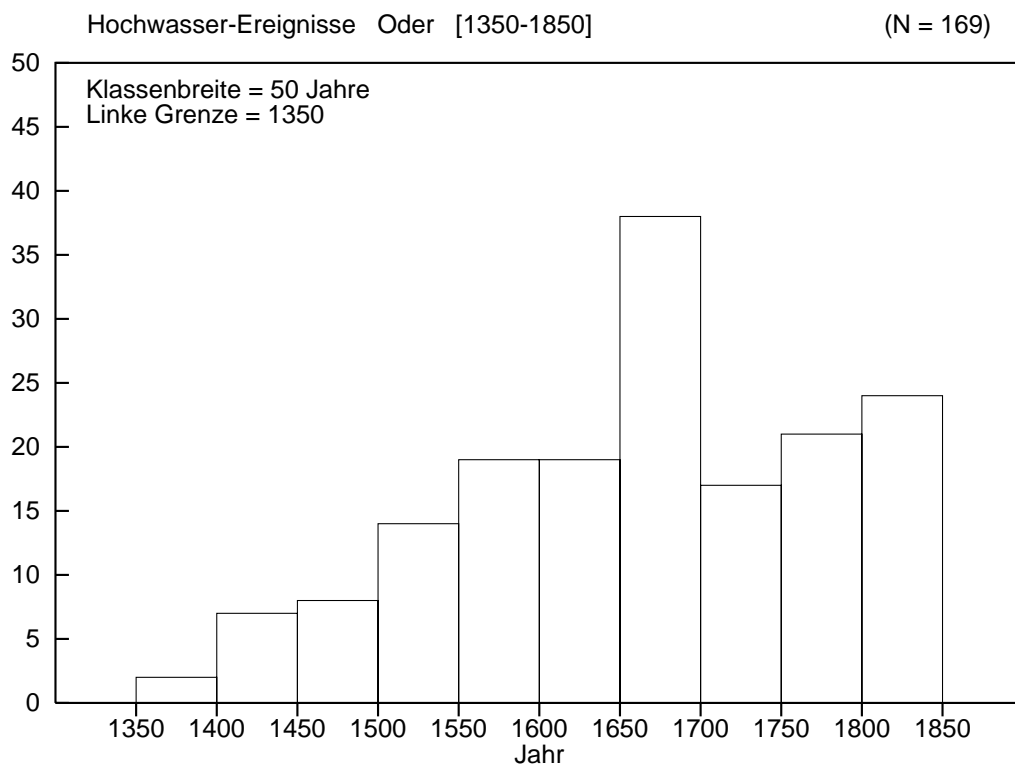


Abbildung 2. Histogrammschätzung. Die mathematischen Histogrammintervall-Grenzen:
[[[...].

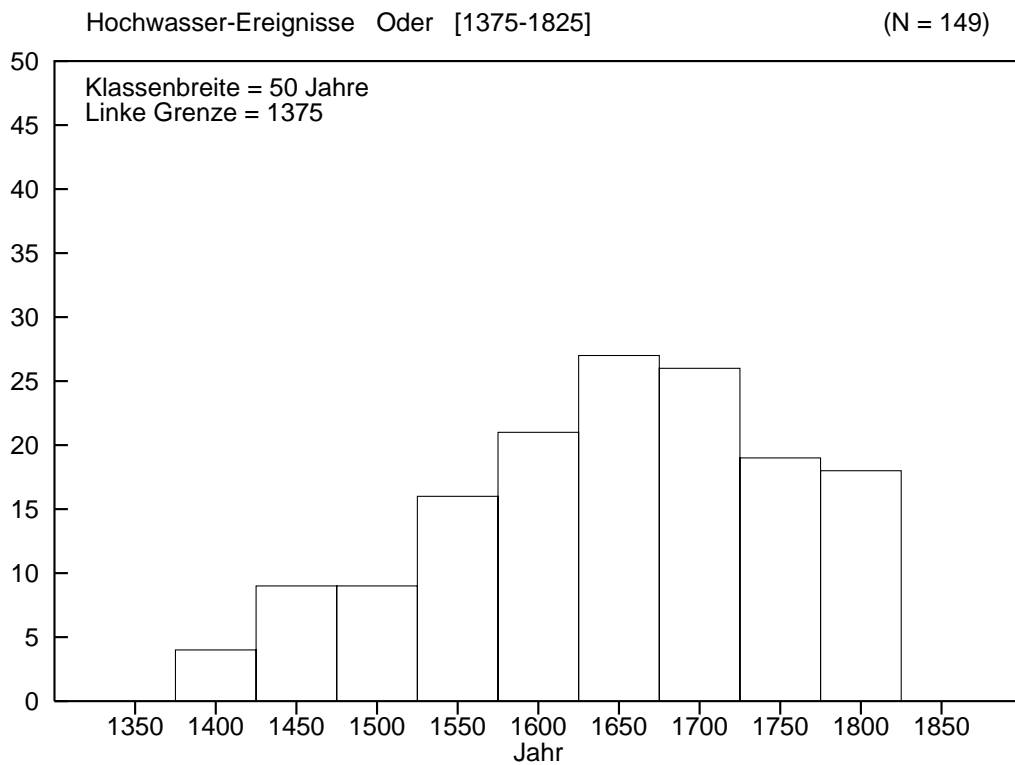


Abbildung 3. Histogrammschätzung. Die Daten in den Bereichen $[1350; 1375[$ und $]1825; 1850]$ sind nicht dargestellt.

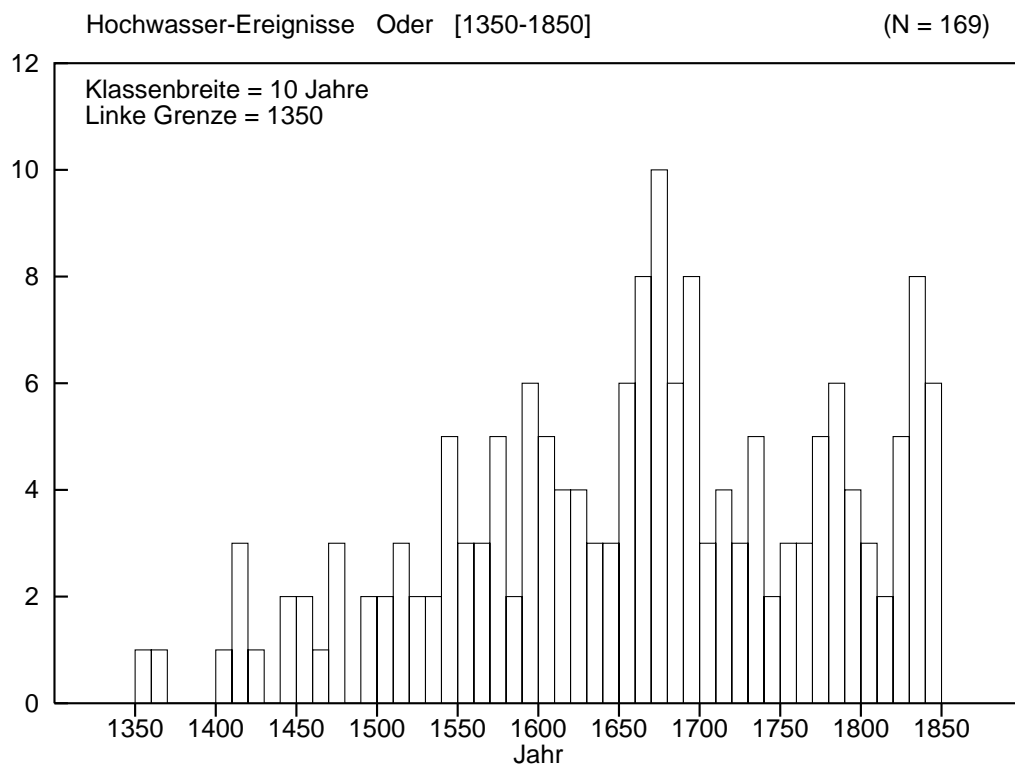


Abbildung 4: Histogrammschätzung.



Abbildung 5: Histogrammschätzung.



Abbildung 6. Kreuzvalidierungsfunktion $CV_{\lambda}(h)$. Es wurde $T_S = T_1$ und $T_E = T_N$ angesetzt. Das Minimum liegt bei $h_{CV} = 20$ Jahre.

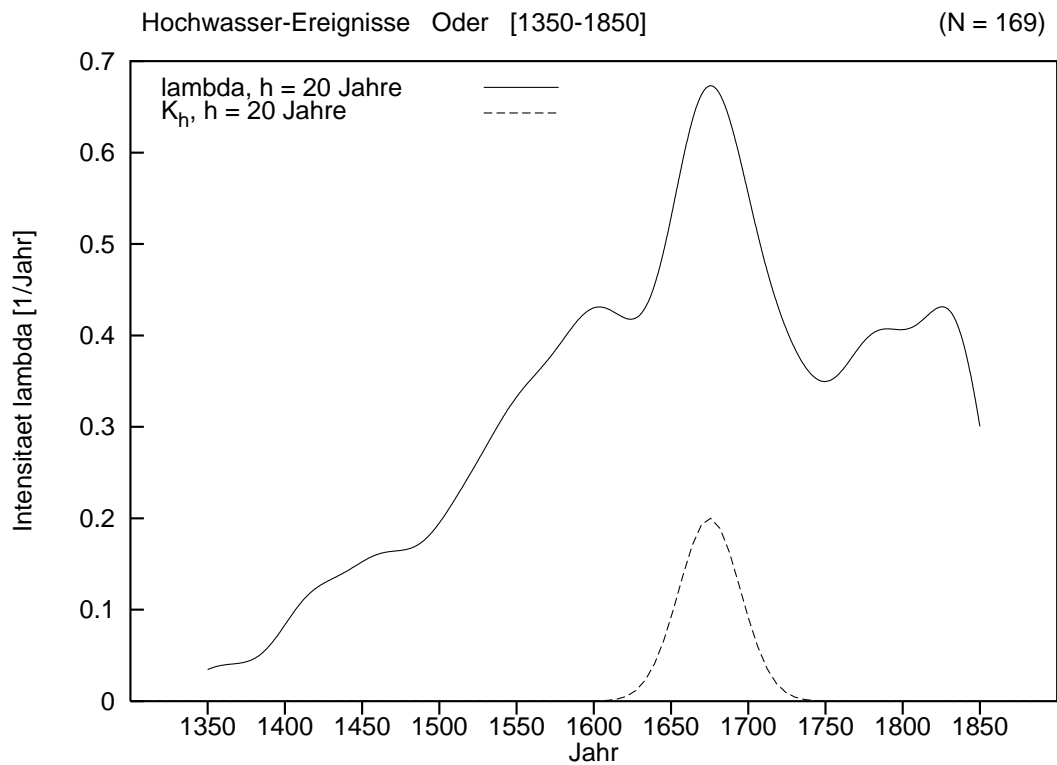


Abbildung 7. Kernschätzung des Intensitätsverlaufes. Zur Veranschaulichung ist auch die Kernfunktion K_h eingezeichnet.

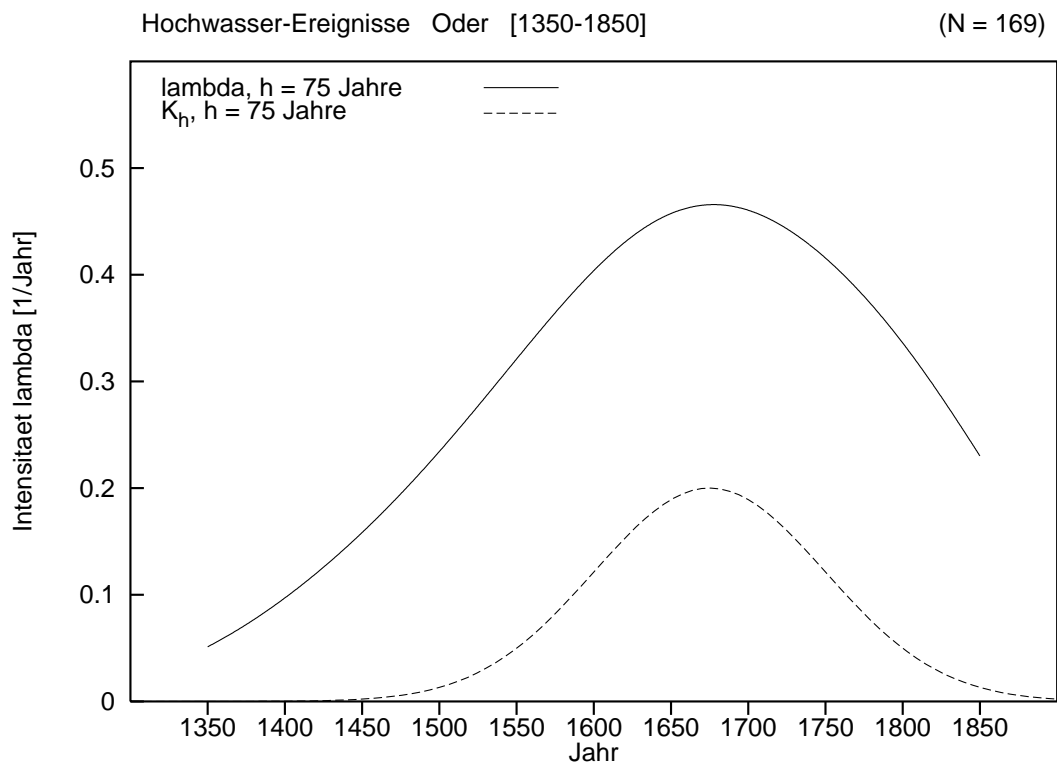


Abbildung 8. Kernschätzung des Intensitätsverlaufes. Zur Veranschaulichung ist auch die Kernfunktion K_h eingezeichnet.